A N A L I Z A   F U N K C J O N A L N A   Z   T O P O L O G I Ą

WPPT 4r., sem. letni
EGZAMIN PODSTAWOWY
GRUPA C

Wrocław, 20 czerwca 2013

ZADANIE 1C

Niech X będzie przestrzenią Hausdorffa, a Y dowolną przestrzenią topologiczną.

(a) (4p) Podaj definicję topologii zwarto-otwartej na $C(X,Y)$.

(b) (4p) Przy jakich założeniach zbieżność w topologii zwarto-otwartej jest tożsama ze zbieżnością niemal jednostajną, a przy jakich z jednostajną?

(c) (4p) Sformułuj twierdzenie Stone'a–Weierstrassa.

ZADANIE 2C

(a) (4p) Sformułuj twierdzenie Banacha–Steinhausa.

(b) (4p) Korzystając z tego twierdzenia udowodnij, że ciąg funkcjonałów zbieżny $*$-słabo jest ograniczony w normie.

(c) (4p) W przestrzeni Hilberta H rozważmy ciąg $(x_n)_{n\geqslant 1}$, gdzie $x_n = ne_n$ (gdzie $\{e_n : n \geqslant 1\}$ jest bazą ortonormalną). Co można powiedzieć o zbiorze wszystkich $x \in H$ takich, że $\langle x, x_n\rangle$ jest ciągiem zbieżnym? (chodzi o dwie własności topologiczne tego podzbioru: jedna na to, że zbiór ten jest „dość duży", druga, że jednak „nie zbyt duży").

ZADANIE 3C

(a) (4p) Podaj definicję widma operatora na przestrzeni Hilberta, z podziałem na widmo punktowe i „pozostałe".

(b) (4p) Jakie jest widmo punktowe projekcji ortogonalnej na nietrywialną podprzestrzeń domkniętą właściwą V?

(c) (4p) Udowodnij, że to już jest całe widmo (tzn., że widmo „pozostałe" jest puste). **Wskazówka**: Aby pokazać, że odpowiedni operator jest „na" wystarczy wykazać, że jego obraz zawiera V i $V^{\perp}$.

Powodzenia!